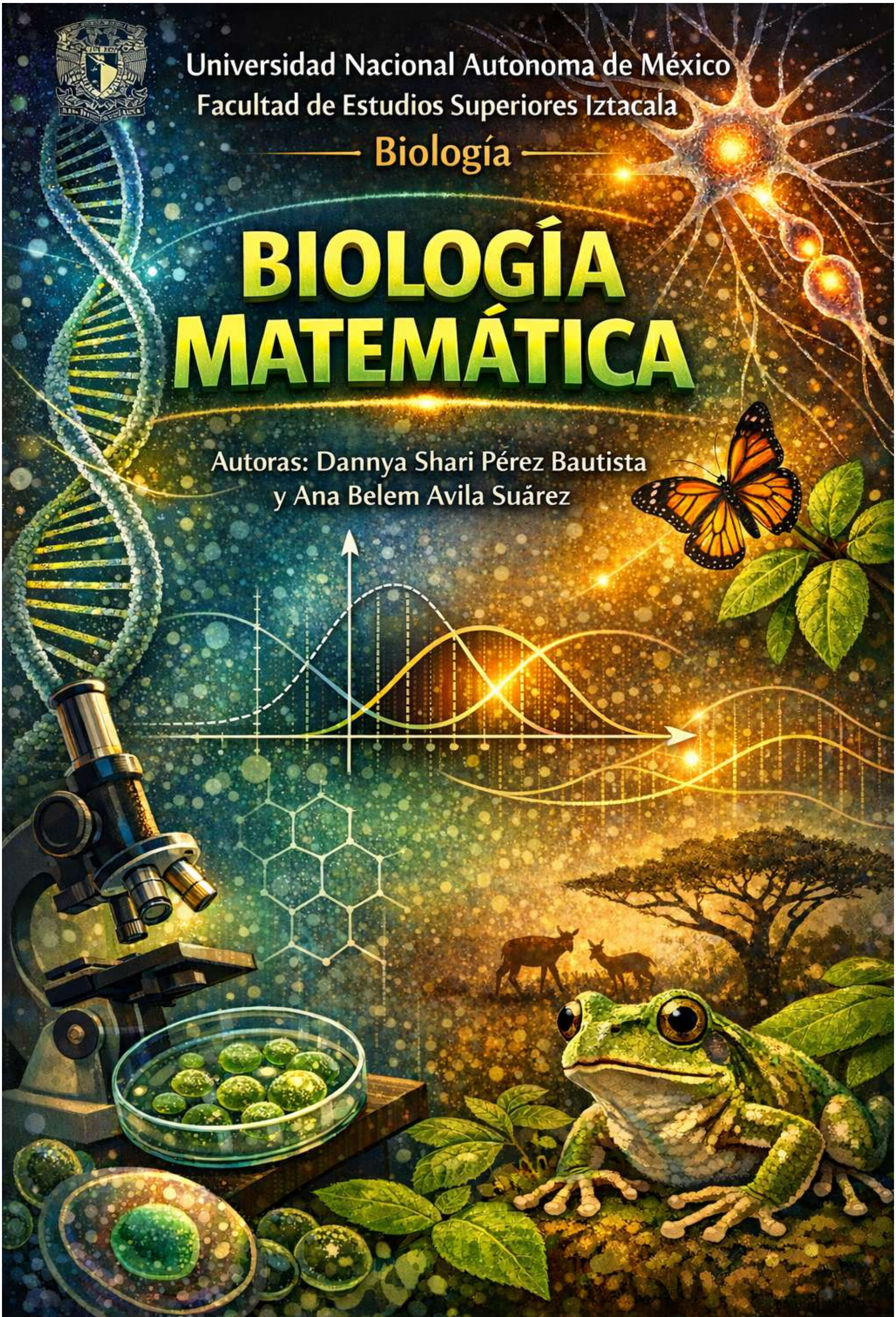
Universidad Nacional Autonoma de México
Facultad de Estudios Superiores Iztacala

Biología

BIOLOGÍA MATEMÁTICA

Autoras: Dannya Shari Pérez Bautista
y Ana Belem Avila Suárez



Índice

Guía Para El Examen Extraordinario De Biología Matemática

Avila Suárez Ana Belem

Pérez Bautista Dannya Shari

Presentación

El propósito de esta guía es facilitar la preparación de los estudiantes para el examen extraordinario de la asignatura de Biología Matemática, promoviendo el estudio autónomo, a partir del fortalecimiento de la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral, orientados a su aplicación precisa en problemas acerca de modelos biológicos. La estructura del documento se estableció con base en los objetivos y el temario propuesto en el programa de la materia.

La guía incluye:

- Explicación teórica de conceptos
- Ejemplo de problemas resueltos
- Problemas propuestos
- Hoja de respuestas

Recomendaciones para los estudiantes:

1. Estudia los conceptos teóricos.
2. Analiza los ejemplos resueltos.
3. Resuelve todos los ejercicios propuestos.
4. Compara tus resultados con los de la hoja de respuestas.
5. Repite los ejercicios en los que hayas detectado errores.

Los criterios de evaluación en el Examen Extraordinario de Biología Matemática son:

- Resolución de problemas (100%), con ponderación:
    - Técnicas matemáticas aplicadas en el procedimiento de resolución (80%)
    - Resultado (20%)

Los materiales necesarios para realizar el Examen Extraordinario de Biología Matemática son:

Formulario, calculadora, 2 hojas blancas, lápiz y goma.

Unidad 1. Límites

1.1 Concepto de límite

El límite describe el comportamiento de una función cuando la variable independiente se aproxima a un valor específico (fig. 1).

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

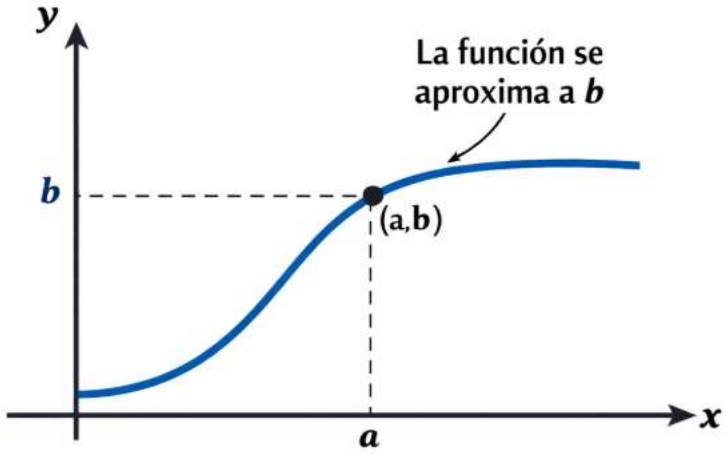


Figura 1. El valor al que se aproxima la función (descrita por la curva azul), cuando la variable “x” se acerca al valor de “a” es justamente “b”.

En biología, los límites permiten interpretar ¿Cuál era la cantidad inicial de una sustancia?, ¿Qué ocurre con una población cuando el tiempo tiende a infinito?, ¿Existe un valor máximo estable en el fenómeno?, ¿Un modelo tiene sentido biológico en tiempos largos?

Un límite no necesariamente evalúa la función en ese punto, sino que describe el comportamiento cercano a ese punto. Por ejemplo, en el modelo logístico que describe el comportamiento de una población en condiciones naturales (fig. 2), el límite de la función (el valor que toma la curva) es cero, cuando la variable independiente (tiempo) tiende igualmente a cero; en cambio, a medida que pasa el tiempo, es decir cuando este tiende a infinito, el tamaño de la población se acerca a la capacidad de carga del sistema.

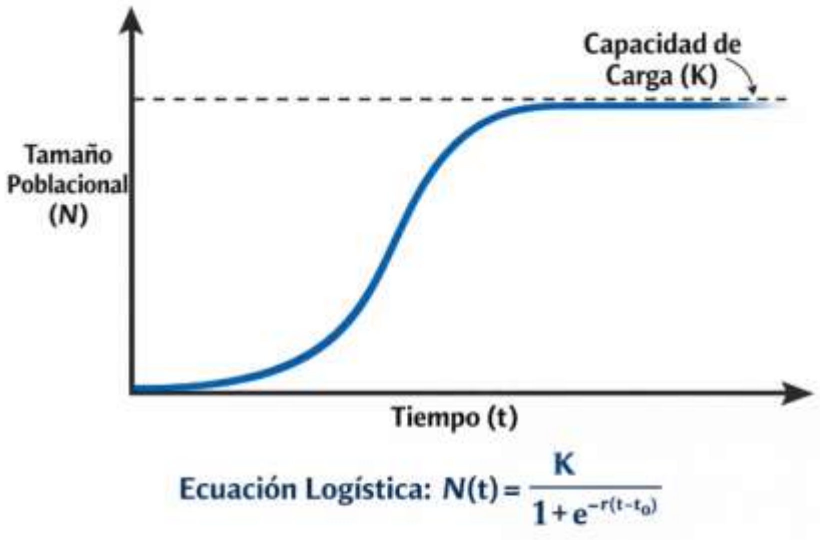


Figura 2. Modelo logístico para describir el comportamiento de una población en condiciones naturales.

1.2 Límites en modelos de decaimiento

Muchos procesos biológicos siguen modelos exponenciales:

- Decaimiento radiactivo
- Eliminación de fármacos
- Mortalidad celular
- Enfriamiento corporal

Modelo general:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

Donde:

$Q(t)$: cantidad (variable dependiente) en el tiempo

Q_0: cantidad inicial

$k > 0$: constante de decaimiento

t: tiempo

¿Qué cantidad había originalmente?

Se calcula:

$$\lim_{t \to 0} Q_0 e^{-kt} =$$

Sustituyendo $t = 0$ en la función:

$$Q_0 e^{-k(0)}$$

Como:

$$e^0 = 1$$

$$\mathrm{Q}_0(1) = Q_0$$

Y por tanto:

$$\lim_{t \to 0} Q_0 e^{-kt} = Q_0$$

Interpretación biológica:

La cantidad inicial Q_0 corresponde al valor de la función cuando el tiempo es cero; por lo que el límite nos permite recuperar la condición inicial del sistema.

1.3 Límites al infinito (comportamiento a largo plazo)

En estudios de **datación geológica y paleobiológica**, se utiliza la desintegración radiactiva de ciertos isótopos para estimar la edad de fósiles y rocas sedimentarias. Suponga que la cantidad de un isótopo radiactivo presente en una muestra está dada por el modelo:

$$\lim_{t \to \infty} Q_0 e^{-kt} =$$

Como el exponente es negativo, si el valor del exponente que acompaña a "e" se hace cada vez más negativo; -1, -10, -100; este se vuelve prácticamente 0, por lo tanto:

$$e^{-kt} \to 0$$

Entonces:

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = Q_0(0)$$

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = 0$$

Interpretación:

A medida que transcurre el tiempo, la cantidad del isótopo radiactivo disminuye progresivamente hasta volverse prácticamente inexistente.

Biológicamente este resultado significa que el isótopo se desintegra exponencialmente de manera continua y, después de un tiempo suficientemente grande, la muestra ya no contiene cantidades detectables del elemento; por lo que el modelo es coherente con el fenómeno físico de desintegración radiactiva.

Este comportamiento es fundamental en la estimación de edades geológicas, ya que permite inferir cuánto tiempo ha pasado desde que el organismo murió o la roca se formó.

1.4 Formas indeterminadas 0/0 e ∞/∞ en biología

En biología matemática, las formas indeterminadas aparecen con frecuencia cuando:

- Se comparan tasas de crecimiento.
- Se estudian proporciones entre variables biológicas.
- Se analizan modelos racionales de crecimiento con saturación.
- Se evalúa el comportamiento a largo plazo de funciones polinomiales racionales.

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Suponga que el tamaño poblacional de una especie en función del tiempo está modelado por:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{60t^2 + 34t + 50}{t^2 + 2t + 5} =$$

donde:

- $N(t)$: número de individuos.
- t: tiempo.

Al sustituir directamente $t \to \infty$ en la función:

$$\frac{60(\infty)^2 + 34(\infty) + 50}{(\infty)^2 + 2(\infty) + 5}$$

Obtenemos la forma indeterminada:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Para resolverla, dividimos numerador y denominador entre la mayor potencia de t, que es t^2:

$$= \frac{60 + \frac{34}{t} + \frac{50}{t^2}}{1 + \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}}$$

Ahora analizamos el comportamiento cuando $t \to \infty$:

$$\frac{34}{t} \to 0, \frac{50}{t^2} \to 0$$

$$\frac{2}{t} \to 0, \frac{5}{t^2} \to 0$$

Entonces el límite queda:

$$\frac{60 + 0 + 0}{1 + 0 + 0}$$

$$= 60$$

Por lo tanto, cuando el tiempo tiende a infinito:

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = 60$$

Esto significa que la población no crece indefinidamente ya que el modelo predice que el tamaño poblacional se aproxima a 60 individuos; este valor representa un **equilibrio asintótico**, también llamado “valor de saturación”, que no necesariamente es el máximo absoluto, sino la cantidad de individuos en la que la población tiende a estabilizarse a largo plazo.

Indeterminación $\mathbf{\frac{0}{0}}$

En biología matemática es común analizar el comportamiento de un sistema en los primeros instantes del fenómeno (cuando $t \to 0$). Esto permite verificar si el modelo:

- Tiene sentido en el instante inicial.
- Presenta estabilidad.
- Es matemáticamente consistente.

Suponga que la concentración de una sustancia producida por bacterias en un cultivo está modelada por:

$$C(t) = \frac{4t^2 + 8t}{2t^2 + 6t}$$

donde:

- $C(t)$: concentración (mg/L),
- t: tiempo (h),
- Nota: El modelo describe la dinámica en las primeras etapas del cultivo.

¿Cuál es la concentración cuando el tiempo se aproxima a cero?

Es decir:

$$\lim_{t \to 0} \frac{4t^2 + 8t}{2t^2 + 6t} =$$

Sustituyendo directamente $t = 0$ en la función:

$$\frac{0 + 0}{0 + 0}$$

Obtenemos la forma indeterminada:

$$\frac{0}{0}$$

Para solucionarlo es necesario factorizar de manera independiente el numerador y el denominador de la función, utilizando la técnica por factor común, considerando como factor a la variable t con <u>la menor potencia</u>:

Numerador:

$$4t^2 + 8t = 4t(t + 2)$$

Denominador:

$$2t^2 + 6t = 2t(t + 3)$$

Al reescribir la función en términos de sus factores, el término común se “cancela” porque su división es 1:

$$\frac{4\cancel{t}(t+2)}{2\cancel{t}(t+3)}$$

Obteniendo:

$$\frac{4(t+2)}{2(t+3)}$$

Ahora simplificamos el 4 y el 2:

$$\frac{2(t+2)}{t+3}$$

Ahora sí podemos sustituir $t = 0$:

$$\frac{2(0+2)}{0+3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\lim_{t \to 0} C(t) = \frac{4}{3}$$

Esto significa que, al inicio del experimento, la concentración de la sustancia de interés se aproxima a $\frac{4}{3}$ mg/L y la discontinuidad en $t = 0$ es removible (es un "hueco" matemático, común en funciones racionales), no un comportamiento biológicamente absurdo. Este tipo de indeterminación ocurre cuando el numerador y el denominador dependen proporcionalmente del tiempo y ambos tienden a cero a la misma velocidad, lo que biológicamente significa que la producción es proporcional al crecimiento inicial y sus velocidades dependen linealmente del tiempo en etapas tempranas.

Además, existen muchos fenómenos que se modelan, al menos en alguna de sus etapas, a partir de funciones racionales, sobre todo si solo se cuenta con datos en periodos de tiempo no muy prolongados y, las predicciones que se requieren consideran rangos temporales también cortos.

Suponga que la velocidad a la que crece una población de rotíferos en un ambiente acuático contaminado está dada por la ecuación:

$$V(t) = \frac{13t^2 - 832}{\sqrt[3]{t} - 2}$$

donde

- V(t): Velocidad de crecimiento (individuos/día),
- t: tiempo (días),
- Nota: el modelo describe el fenómeno en un periodo de tiempo corto.

¿A qué valor tiende la velocidad de crecimiento a los 8 días de iniciado el conteo?

$$\lim_{t \to 8} \frac{13t^2 - 832}{\sqrt[3]{t} - 2} =$$

Si se sustituye el valor al que tiende la variable independiente en el límite se obtiene una indeterminación del tipo 0/0:

$$\frac{13(8)^2 - 832}{\sqrt[3]{8} - 2} = \frac{0}{0}$$

Lo anterior no significa que el límite no existe, al igual que en casos anteriores, la razón de esta indeterminación se debe a la estructura matemática de funciones racionales, en las que existen huecos debidos a las reglas aritméticas fundamentales de la división. Por lo tanto, para encontrar el límite solicitado es necesario expresar la función en términos distintos, pero sin alterar su sentido matemático:

$$\lim_{t \to 8} \frac{13t^2 - 832}{\sqrt[3]{t} - 2} =$$

En este caso es necesario realizar un cambio de variable en el denominador de la función, en donde la variable está afectada por una raíz cúbica o potencia racional 1/3, de manera que quede expresada como una variable de grado 1:

$$\sqrt[3]{t} = u$$

Al realizar este cambio de variable es necesario modificar la manera en la que se expresa la variable independiente (t) en toda la función, con la finalidad de evitar su alteración, de tal manera que:

Si: $\sqrt[3]{t} = u$

O, lo que es igual: $(t)^{\frac{1}{3}} = u$

Entonces:

$$\left((t)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = u^3$$

Resolviendo la potencia de potencias en el lado izquierdo de la igualdad:

$$t = u^3$$

Y por tanto, en el numerador de la función:

$$t^2 = (u^3)^2$$

$$t^2 = u^6$$

Mientras que en el valor al que tiende la variable independiente (t) en el límite, considerando el cambio de variable queda:

$$t \to 8$$

$$u^3 \to 8$$

Y como el plano cartesiano considera variables lineales, es necesario calcular la raíz cúbica de ambos términos:

$$\sqrt[3]{u^3} \to \sqrt[3]{8}$$

Calculando las raíces:

$$u \to 2$$

Por lo tanto, el límite se reescribe como sigue:

$$\lim_{u \to 2} \frac{13u^6 - 832}{u - 2}$$

A continuación, es necesario factorizar el numerador de la función; aunque existen muchas “reglas” de factorización que nos ayudan a simplificar cálculos, la técnica fundamental para factorizar cualquier polinomio es la “división sintética”, siempre y cuando el divisor sea de la forma “x-c”, es decir, un binomio de grado 1. Por lo tanto, se procede a factorizar el polinomio: $13u^6 - 832$, considerando el divisor: $u - 2$. Para comenzar con la técnica es necesario completar el polinomio:

$$13u^6 + 0u^5 + 0u^4 + 0u^3 + 0u^2 + 0u - 832$$

Para escribir el dividendo se utilizan únicamente los coeficientes del polinomio con sus signos correspondientes, mientras que para escribir el divisor solo se considera el término independiente del binomio, invirtiéndose su signo:

Dividendo

$$\text{Divisor} \longleftarrow \begin{array}{c|ccccccc} 2 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -832 \\ & & 26 & 52 & 104 & 208 & 416 & 832 \\ \hline & 13 & 26 & 52 & 104 & 208 & 416 & \boxed{0} \end{array}$$

Cociente

Residuo

Para concluir la división, es necesario colocar la variable independiente al cociente, restando una unidad al grado del polinomio dividendo, de tal manera que, si este último era de grado 6, el cociente queda de grado 5:

$$13u^5 + 26u^4 + 52u^3 + 104u^2 + 208u + 416$$

En la división anterior, como el residuo fue 0, por “Teorema del factor” se afirma que el divisor es factor del dividendo y, por tanto, el polinomio se factoriza como sigue:

$$13u^6 - 832 = (u - 2)(13u^5 + 26u^4 + 52u^3 + 104u^2 + 208u + 416)$$

De esta manera, es posible reescribir el límite sustituyendo el numerados por los factores hallados anteriormente:

$$\lim_{u \to 2} \frac{(u - 2)(13u^5 + 26u^4 + 52u^3 + 104u^2 + 208u + 416)}{u - 2} =$$

Como la división entre uno de los factores del numerador y el denominador da como resultado 1, se puede simplificar el límite:

$$\lim_{u\to 2} \frac{\cancel{(u-2)}(13u^5 + 26u^4 + 52u^3 + 104u^2 + 208u + 416)}{\cancel{u-2}} =$$

Y se evalúa el valor de la variable independiente para encontrar el límite de la función:

$$13(2)^5 + 26(2)^4 + 52(2)^3 + 104(2)^2 + 208(2) + 416 = 2496$$

Por lo tanto, el número de rotíferos en 8 días tiende a 2496 individuos.

1.5 Límites que tienden al número de Euler (e):

En biología, muchos de los fenómenos estudiados a varios niveles tienden valores exponencialmente muy grandes o pequeños a medida que pasa el tiempo, tal es el caso del tamaño poblacional de microorganismos mantenidos por periodos de tiempo prolongados dentro de quimiostatos o, como se mencionó anteriormente, el decaimiento de isótopos radiactivos, cuya tasa de desintegración se utiliza para el fechamiento de rocas y fósiles, aunque también suelen aparecer en la dinámica de eliminación de fármacos, metabolismo o difusión de sustancias.

En ese sentido, las expresiones exponenciales surgen del cálculo de los límites de funciones relacionadas con la determinación del interés compuesto cuando el tiempo (t) se hace periódicamente más grande o pequeño, como se muestra en la tabla siguiente:

$\boldsymbol{t \to 0}$	$\boldsymbol{y = (1+t)^{\frac{1}{t}}}$	$\boldsymbol{t \to \infty}$	$\boldsymbol{y = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}$
1	2.0000	1	2.0000
0.5	2.2500	2	2.2500
0.1	2.5937	10	2.5937
0.05	2.6533	20	2.6533
0.01	2.7048	100	2.7048

$t \to 0$	$y = (1+t)^{\frac{1}{t}}$	$t \to \infty$	$y = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$
0.005	2.7115	200	2.7115
0.001	2.7169	1000	2.7169
0.0001	2.7181	10000	2.7181

Como se observa, en ambos casos el límite de las funciones es el conocido número de Euler ($e \approx 2.7181$); cambiando el término utilizado para la variable independiente:

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

y

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Ahora bien, suponga que la cantidad de cierto elemento radiactivo en una roca para datación geológica está determinada por la ecuación:

$$Q(t) = \left(\frac{t-2t^2}{t}\right)^{\frac{2}{t}}$$

donde:

- Q(t): cantidad del elemento (mg),
- t: es el tiempo (millones de años)

¿Qué cantidad del elemento había en la roca originalmente?

$$\lim_{t \to 0}\left(\frac{t-2t^2}{t}\right)^{\frac{2}{t}} =$$

En este caso, el límite propuesto es parecido a: $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; como el resultado de dicho límite es "e", se procede a realizar procedimientos algebraicos para asemejar el ejercicio lo más posible a la forma conocida, comenzando por simplificar el cociente de la función:

$$\frac{t-2t^2}{t} = 1-2t$$

Sustituyendo este resultado en el límite, se obtiene:

$$\lim_{t \to 0}(1 - 2t)^{\frac{2}{t}} =$$

Y se procede a realizar un cambio de variable para expresar la función de otra manera, sin alterar su sentido matemático:

$$-2t = u$$

Por lo tanto:

$$t = \frac{u}{-2}$$

Y como $t \to 0$, también: $u \to 0$. Por lo que al reescribir el límite considerando el cambio de variable:

$$\lim_{u \to 0}(1 + u)^{\frac{2}{\frac{u}{-2}}} =$$

Realizando la división de fracciones en el exponente:

$$\frac{\frac{2}{1}}{\frac{u}{-2}} = \frac{-4}{u}$$

Reescribiendo el límite:

$$\lim_{u \to 0}(1 + u)^{\frac{-4}{u}} =$$

Y se procede a factorizar el exponente considerando:

$$\frac{-4}{u} = \left(\frac{1}{u}\right)(-4)$$

Por lo que el límite se reescribe:

$$\left[\lim_{u \to 0}(1 + u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-4} = e^{-4} = \frac{1}{e^4} = 0.018\ mg$$

Suponga que el tamaño poblacional de *S. aureus* en quimiostato, está dado por la función:

$$N(t) = \left(\frac{t^3 + 12t^2}{t^3}\right)^{5t}$$

donde:

- N(t): tamaño poblacional (número de UFC),

- t: tiempo (días)

¿Cuál es el valor al que tiende el tamaño poblacional a medida que transcurre el tiempo?

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^3+12t^2}{t^3}\right)^{5t} =$$

Como el límite propuesto es parecido a: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ y el resultado de dicho límite es "e", se procede a realizar procedimientos algebraicos, como en el caso anterior, para asemejar el ejercicio lo más posible a la forma conocida, comenzando por simplificar el cociente de la función:

$$\frac{t^3+12t^2}{t^3} = 1+\frac{12}{t}$$

Sustituyendo este resultado en el límite, se obtiene:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{12}{t}\right)^{5t} =$$

Y se procede a realizar un cambio de variable para expresar la función de otra manera, sin alterar su sentido matemático:

$$\frac{12}{t} = \frac{1}{u}$$

Por lo tanto:

$$t = 12u$$

Y como $t \to \infty$, también: $u \to \infty$. Por lo que al reescribir el límite considerando el cambio de variable:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{5(12u)} =$$

Y se procede a factorizar el exponente considerando:

$$5(12u) = (5)(12)(u) = 60u$$

Por lo que el límite se reescribe:

$$\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{60} = e^{60} = 1.142\times 10^{26} UFC$$

1.6 Ejercicios propuestos

1. En un experimento de laboratorio, una población de bacterias expuestas a radiación disminuye según el modelo:

$$N(t) = 200e^{-0.3t}$$

donde:

- $N(t)$: número de bacterias,
- t: tiempo (h).

Calcular:

$$\lim_{t \to 0} 200e^{-0.3t} =$$

2. La concentración de un antibiótico en el torrente sanguíneo está modelada por:

$$C(t) = 400e^{-0.1t}$$

donde:

- $C(t)$: concentración (mg/L),
- t: tiempo (h).

Calcular:

$$\lim_{t \to \infty} 400e^{-0.1t} =$$

3. El tamaño de una población en un ecosistema cerrado está modelado por:

$$P(t) = \frac{100t}{t + 8}$$

donde:

- $P(t)$: número de individuos,
- t: tiempo (años).

Calcular:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{100t}{t + 8} =$$

4. La biomasa producida en un biorreactor está dada por:

$$B(t) = \frac{5t^2}{t^2 + 1}$$

donde:

- $B(t)$: biomasa (g),
- t: tiempo (días).

Calcular:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{5t^2}{t^2+1} =$$

5. La concentración de una hormona en sangre está dada por:

$$H(t) = \frac{600t}{t+12}$$

donde:

- $H(t)$: concentración de la hormona (pg/mL),
- t: tiempo después de la estimulación hormonal.

a) Calcular:

$$\lim_{t\to\infty} H(t) =$$

b) Interpretar el resultado biológicamente.

6. La concentración de una sustancia en el organismo disminuye según:

$$C(t) = C_0 e^{-0.8t}$$

donde:

- $C(t)$: concentración (mg/mL),
- C_0es la concentración inicial,
- t: tiempo (h).

a) ¿Cuál es la concentración inicial?

b) ¿Qué ocurre cuando $t \to \infty$?

Interpretar el resultado en términos fisiológicos.

7. La velocidad a la que crece el cráneo de un mamífero está dada por la función:

$$V(t) = \frac{12t^2 - 24t}{5t^3 - 3t^2 - 28}$$

donde:

- V(t): velocidad (cm/año),
- t: tiempo (años)

¿Cuál es la velocidad de crecimiento del cráneo del mamífero a los dos años de nacido?

8. La velocidad en la que ocurre una reacción química en presencia de catalizadores es:

$$V(t) = \frac{V_{max}[S]}{k_m + [S]}$$

donde:

- V(t): velocidad de reacción (mg/min)
- V_{max}: velocidad máxima de la reacción (mg/min),
- $[S]$: concentración del catalizador (mg), y
- k_m es una constante positiva

¿A qué valor tiende la velocidad "V" cuando la cantidad del catalizador se incrementa ilimitadamente?

9. La velocidad con la que ocurre una reacción sin catalizadores está dada por la función:

$$V(t) = \frac{3t^2 - t - 24}{t^3 - 27}$$

donde:

- V(t): velocidad de reacción (mg/min)
- T: tiempo (min)

Calcular el límite de la velocidad a los 3 min.

10. La biomasa de una población microbiana en cultivo está dada por:

$$B(t) = \left(\frac{t^2 + 8t}{t^2}\right)^{2t}$$

donde:

- $B(t)$: biomasa (mg/mL),

- t: tiempo (horas)

Determine el valor al que tiende la biomasa cuando el tiempo aumenta indefinidamente.

11. La concentración de nitrógeno disuelto en un lago se modela mediante:

$$N(t) = \left(\frac{t + 5t^2}{t}\right)^{\frac{1}{t}}$$

donde:

- $N(t)$: concentración de nitrógeno (mg/L),
- t: tiempo (días)

Determine la concentración inicial del nutriente.

Unidad 2. Derivadas

2.1 Concepto de derivada

Sea una función $f(x)$. La derivada se define como:

$$\mathrm{RCI} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La ecuación anterior se interpreta como el cambio de un fenómeno particular en un solo punto. En la figura 3 se aprecia una aproximación para el cálculo del cambio en un fenómeno descrito por una función exponencial; si se conocen las coordenadas de dos puntos específicos de la curva (A y B) es posible aplicar la fórmula de la pendiente (m), que permite valorar la cantidad de cambio en el intervalo de esos puntos:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A esta aproximación para determinar el cambio en un fenómeno a partir del cálculo de la pendiente de la línea inscrita entre dos puntos de la gráfica se le conoce como Razón de Cambio Promedio (RCP), que corresponde al valor de la pendiente de la recta secante a la curva que se inscribe sobre los puntos A y B (fig. 3: línea azul).

$$RCP = m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Sin embargo, si se requiere conocer el cambio de manera instantánea, es necesario aproximar los puntos que se consideraron inicialmente; suponiendo que el punto B de la figura 3 se aproximara sucesivamente al punto A, hasta coincidir con este, se obtendría un único punto. Matemáticamente, la determinación del cambio entre estos dos puntos a medida que se aproximan equivale a calcular el límite de la función pendiente (m) cuando el intervalo entre ellos (Δx) tiende a cero, es decir:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esta aproximación para la determinación del cambio en un punto se conoce como Razón de Cambio Instantáneo (RCI) o derivada y corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva que se inscribe en el punto A (fig. 3).

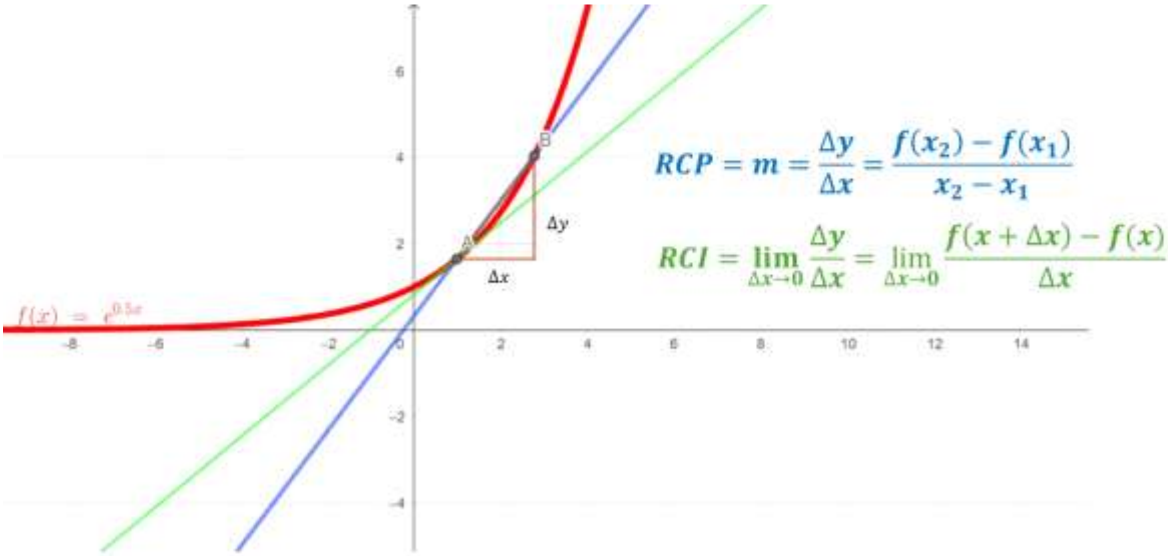


Figura 3. Aproximaciones para la determinación de la cantidad de cambio en un fenómeno. La RCP mide la pendiente de la recta secante a la curva inscrita entre dos puntos, mientras que la RCI determina la pendiente de la recta tangente en un punto.

Biológicamente, la derivada se interpreta como la velocidad con que incrementa o disminuye un fenómeno en un momento particular:

- Si $N(t)$ es la función que determina el tamaño poblacional de cierta especie, $\frac{dN}{dt}$ (la derivada de la función "N" con respecto al tiempo "t") es la tasa de crecimiento poblacional.
- Si $L(t)$es la función que predice la longitud de una especie de peces, $\frac{dL}{dt}$ (la derivada de la función "L" con respecto al tiempo "t") es su velocidad de crecimiento.
- Si $T(t)$ es la función de la temperatura de cierta reacción química, $\frac{dT}{dt}$ (la derivada de la función "T" con respecto al tiempo "t") es la velocidad de enfriamiento.

La derivada indica qué tan rápido cambia un sistema biológico en un instante específico.

2.2 Reglas básicas de derivación

Regla de la constante

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

Ejemplo:

Si:

$$N(t) = 538$$

Entonces:

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

Regla de la potencia

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

Ejemplo:

Si:

$$N(t) = 4t^3$$

Entonces:

$$\frac{dN}{dt} = (4)(3)t^{3-1} = 12t^2$$

Regla de la exponencial

$$\frac{dae^{bx}}{dx} = abe^{bx}$$

Si

$$N(t) = 200e^{0.4t}$$

Entonces

$$\frac{dN}{dt} = (0.4)(200)e^{0.4t}$$

$$\frac{dN}{dt} = 80e^{0.4t}$$

Regla del logaritmo

$$\frac{dlnx}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo

Si

$$N(t) = \ln{(t)}$$

Entonces

$$\frac{d\ln t}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{t}$$

Regla de la suma

$$\frac{du + v + w}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{ax}$$

Ejemplo

$$N(t) = 4t^2 - 3e^{-2t} + \ln t$$

Utilizamos la regla de la suma para separar cada monomio de la función e indicar su derivación con respecto a “x”

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d4t^2}{dt} - \frac{d3e^{-2t}}{dt} + \frac{d\ln t}{dt}$$

Y derivamos utilizando las reglas correspondientes dependiendo del tipo de función en cada monomio

$$\frac{dN}{dt} = (4)(2)t^{2-1} - (3)(-2)e^{-2t} + \frac{1}{t}$$

Resolviendo

$$\frac{dN}{dt} = 8t + 6e^{-2t} + \frac{1}{t}$$

Que es la derivada de la función original.

Regla del producto

$$\frac{duv}{dx} = du(v) + u(dv)$$

Ejemplo

$$P(t) = t \cdot e^{0.3t}$$

Definimos:

$$u = t$$

$$v = e^{0.3t}$$

Derivamos cada función por separado

Derivada de u

$$u = t$$

$$\frac{du}{dt} = 1$$

Derivada de v

$$v = e^{0.3t}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0.3e^{0.3t}$$

Y sustituimos en la regla del producto

Recordemos:

$$\frac{duv}{dx} = du(v) + u(dv)$$

Sustituyendo las derivadas que obtuvimos previamente:

$$\frac{duv}{dt} = (1)(e^{0.3t}) + (t)(0.3e^{0.3t})$$

Simplificamos

$$\frac{duv}{dx} = e^{0.3t} + 0.3te^{0.3t}$$

Y finalmente factorizamos (opcional)

Podemos factorizar por el término común $e^{0.3t}$:

$$\frac{duv}{dx} = e^{0.3t}(1 + 0.3t)$$

Por lo tanto, la derivada de la función original es:

$$\frac{duv}{dx} = e^{0.3t} + 0.3te^{0.3t}$$

o

$$\frac{duv}{dx} = e^{0.3t}(1 + 0.3t)$$

Regla del cociente

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}(v) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

Ejemplo:

$$N(t) = \frac{50t}{t + 5}$$

Definimos u y v

$$u = 50t$$

$$v = t + 5$$

Calculamos las derivadas de manera independiente

$$\frac{du}{dt} = 50$$

$$\frac{dv}{dt} = 1$$

Sustituimos en la fórmula

Recordemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dt}(v) - u\left(\frac{dv}{dt}\right)}{v^2}$$

Sustituimos:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{50(t + 5) - 50t(1)}{(t{+}5)^2}$$

Simplificamos el numerador

$$\frac{dN}{dt} = \frac{50t + 250 - 50t}{(t{+}5)^2}$$

Cancelamos términos semejantes y obtenemos el resultado final:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{250}{(t{+}5)^2}$$

2.3 Ejercicios resueltos (derivación directa)

1. Derivar:

$$N(t) = 6t^4 - 3t^2 + 8$$

Recordemos:

$$\frac{du + v + w}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{ax}$$

$$\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$$

Y

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

Derivamos término por término:

Primer término

$$\frac{d6t^4}{dt}$$

Multiplicamos el exponente por el coeficiente:

$$= 6(4)t^{4-1}$$

$$= 24t^3$$

Segundo término

$$\frac{d - 3t^2}{dt}$$

$$= -3(2)t^{2-1}$$

$$= -6t$$

Tercer término

$$\frac{d8}{dt} = 0$$

Resultado:

$$\frac{dN}{dt} = 24t^3 - 6t + 0$$

$$\frac{dN}{dt} = 24t^3 - 6t$$

2. Derivar:

$$C(t) = 150e^{-0.2t}$$

Usamos:

$$\frac{dae^{bt}}{dt} = abe^{bt}$$

Entonces:

$$= 150(-0.2)e^{-0.2t}$$
$$= -30e^{-0.2t}$$

Resultado:

$$\frac{dC}{dt} = -30e^{-0.2t}$$

2.4 Problemas contextualizados resueltos

1. La población de bacterias está dada por:

$$N(t) = 500e^{0.5t}$$

a) Determinar la tasa de crecimiento.

b) Evaluar en $t = 2$.

Solución:

$$\frac{dN}{dt} = 500(0.5)e^{0.5t}$$
$$\frac{dN}{dt} = 250e^{0.5t}$$

En $t = 2$:

$$\frac{dN}{dt} = 250e^{0.5(2)}$$
$$\frac{dN}{dt} = 250e^{1}$$

Resultado:

$$\frac{dN}{dt} = 250e$$

De acuerdo con el resultado obtenido, se puede concluir que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño poblacional, es decir que se trata de un fenómeno densodependiente considerando que el modelo describe un crecimiento exponencial sin limitación ambiental; en $t = 2$, la población crece a razón de $250e$ bacterias por unidad de tiempo.

2. El crecimiento de una población está dada por la siguiente ecuación:

$$N(t) = \frac{100t}{t+4}$$

a) Determinar la tasa de crecimiento.

b) Evaluar en $t = 10$

Tenemos un cociente por lo que resolveremos de la siguiente manera, aplicando la regla del cociente.

Identificamos u y v

$$u = 100t$$

$$v = t + 4$$

Derivamos cada uno

$$\frac{du}{dt} = 100$$

$$\frac{dv}{dt} = 1$$

Aplicamos la regla del cociente

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}(v) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

Sustituimos:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{100(t+4) - 100t(1)}{(t+4)^2}$$

Simplificamos

$$\frac{dN}{dt} = \frac{100t + 400 - 100t}{(t+4)^2}$$

Cancelamos términos

$$\frac{dN}{dt} = \frac{400}{(t+4)^2}$$

Resultado final

$$\frac{dN}{dt} = \frac{400}{(t+4)^2}$$

Para evaluar t=10 sustituimos directamente en la expresión de la derivada:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{400}{(10+4)^2}$$
$$= \frac{100}{49}$$

Si lo expresamos en decimal:

$$\frac{100}{49} \approx 2.04$$

Resultado final

$$\frac{dN}{dt} = \frac{100}{49} \approx 2.04$$

Lo anterior significa que en $t = 10$ la población está creciendo aproximadamente a 2.04 individuos por unidad de tiempo; comparando este resultado con los correspondientes a los tiempos iniciales, la tasa de crecimiento es mucho menor, lo que confirma que el modelo describe crecimiento desacelerado debido a limitación ambiental.

2.4 Regla de la cadena (derivadas de funciones compuestas)

La regla de la cadena se aplica cuando una variable depende de otra de manera indirecta, es decir, cuando una función se encuentra dentro de otra.

Si:

$$y = f(g(x))$$

Entonces, para encontrar la derivada de una función compuesta se deriva la función externa dejando intacta la interna, y el resultado se multiplica por la derivada de la función interna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$

En biología, muchas variables dependen indirectamente de otras. Un ejemplo de ello se relaciona con las alternativas de control biológico de plagas, algunas especies de arañas venenosas de importancia médica (A) pueden controlarse introduciendo en su hábitat algún tipo de parásitos (P) que se encargan de destruir de manera selectiva los huevecillos de las arañas. Sin embargo, la población de parásitos depende de la temperatura del medio (T), las relaciones de dependencia son:

Temperatura → afecta a parásitos → afectan a arañas.

Lo que se puede expresar:

$A = f(P)$: la población de arañas es una función del tamaño poblacional de parásitos.

$P = g(T)$: la población de parásitos es una función de la temperatura.

Eso genera una función compuesta:

$$A = f(g(P))$$

Por lo tanto, si se desea conocer la tasa de crecimiento de la población de arañas con respecto a la temperatura, es necesario aplicar la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$\frac{dA}{dT} = \frac{dA}{dP} \cdot \frac{dP}{dT}$$

Es decir:

Cambio de la población de arañas respecto a temperatura = Cambio de la población de arañas respecto a la población de parásitos × Cambio de la población de parásitos respecto a temperatura. A eso hace referencia la dependencia ecológica en cascada.

Ejemplo resuelto

Para calcular la tasa de crecimiento poblacional de las arañas con respecto a la temperatura en el ejemplo anterior y considerando las funciones:

$$A = f(P) = \frac{M}{1 + P}$$

y

$$P = g(T) = T^2 - 4T$$

Lo que buscamos es

$$\frac{dA}{dT}$$

Es decir, el cambio de la población de arañas respecto a la temperatura. Para comenzar, identificamos la función externa e interna:

Tenemos:

$$A = \frac{M}{1 + g(T)}$$

Función externa:

$$A = f(P) = \frac{M}{1 + P}$$

Función interna:

$$P = g(T) = T^2 - 4T$$

Derivamos la función externa respecto a P

Reescribimos:

$$A(P) = M(1 + P)^{-1}$$

Derivamos usando regla de potencia:

$$\frac{dA}{dP} = M(-1)(1 + P)^{-2}$$

$$\frac{dA}{dP} = -\frac{M}{(1+P)^2}$$

Derivar la función interna

$$P = g(T) = T^2 - 4T$$

$$\frac{dP}{dT} = 2T - 4$$

Aplicar regla de la cadena

$$\frac{dA}{dT} = \frac{dA}{dP} \cdot \frac{dP}{dT}$$

Sustituimos:

$$\frac{dA}{dT} = -\frac{M}{(1+P)^2}(2T - 4)$$

Ahora sustituimos $P = T^2 - 4T$:

$$\frac{dA}{dT} = -\frac{M(2T - 4)}{(1 + T^2 - 4T)^2}$$

Resultado final

$$\frac{dA}{dT} = -\frac{M(2T - 4)}{(1 + T^2 - 4T)^2}$$

El signo negativo indica que, al aumentar la cantidad de parásitos, la población de arañas disminuye. Como los parásitos dependen de la temperatura, esta afecta indirectamente a las arañas. Existen rangos de temperatura donde el impacto es mayor (dependiendo del signo de $2T - 4$).

2.5 Problemas resueltos (regla de la cadena)

1. Una población depende de la concentración de alimento:

$$N = f(C) = \sqrt{C}$$

La concentración depende del tiempo:

$$C = g(t) = 5t^2$$

Determinar la velocidad de crecimiento de la población (N) con respecto al tiempo (t):

$$\frac{dN}{dt}$$

Derivamos respecto a C

$$\frac{dN}{dC} = \frac{1}{2\sqrt{C}}$$

Derivamos C respecto a t

$$\frac{dC}{dt} = 10t$$

Aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{dC} \cdot \frac{dC}{dt}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{C}} \cdot 10t$$

Sustituimos $C = 5t^2$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{10t}{2\sqrt{5t^2}}$$

Resultado final

$$\frac{dN}{dt} = \frac{10t}{2\sqrt{5t^2}}$$

Por lo tanto, el tamaño de la población depende indirectamente del tiempo, lo que significa que el crecimiento está mediado por disponibilidad de alimento.

2.6 Máximos y mínimos

Un **máximo** ocurre cuando una función alcanza su valor más alto en un intervalo, mientras que un **mínimo** ocurre cuando la función alcanza su valor más bajo (fig. 4).

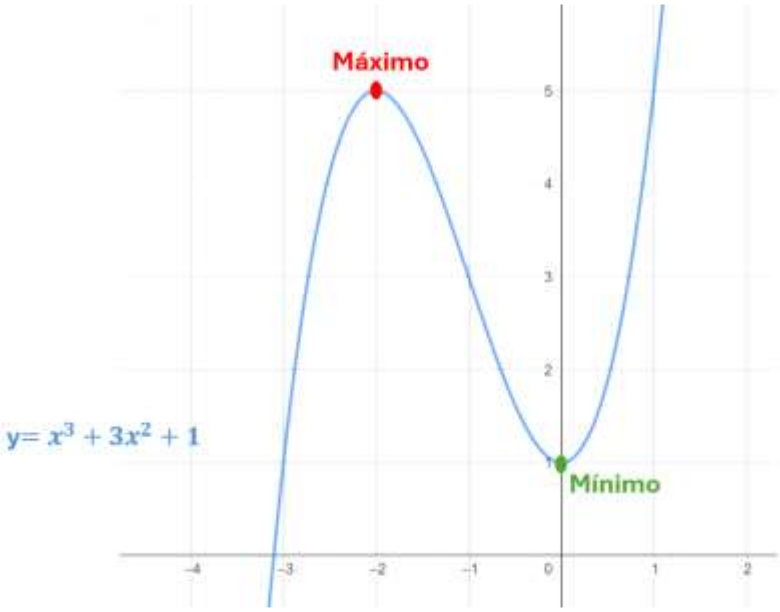


Figura 4. Puntos máximo y mínimo de una función potencial de grado 3.

Matemáticamente, un máximo o mínimo local ocurre cuando:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Es decir, cuando la tasa de cambio instantánea es cero, lo que gráficamente se observa cuando la recta tangente a la curva tiene un valor de pendiente igual a cero (fig. 5).

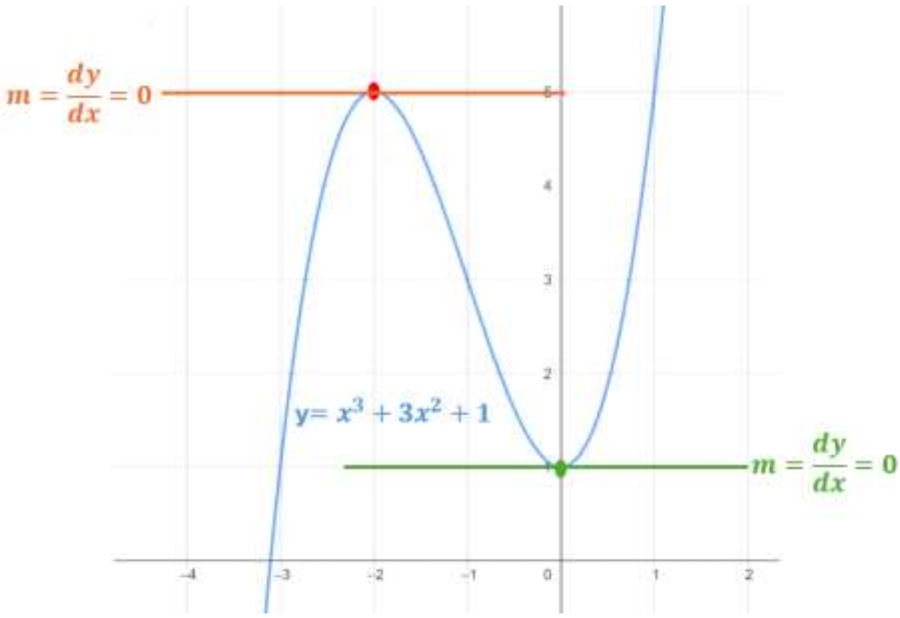


Figura 5. En los puntos máximo y mínimo, las rectas tangentes son completamente horizontales, por lo que el valor de su pendiente (m) es de cero.

En biología, existen muchos fenómenos que toman valores máximos o mínimos, como:

- Tamaño máximo poblacional.
- Momento de máxima concentración hormonal.
- Punto de mayor tasa metabólica.
- Tiempo óptimo de crecimiento.
- Nivel mínimo de supervivencia.

Por lo que el cálculo de las derivadas de fenómenos biológicos es fundamental para encontrar puntos críticos en estos sistemas.

Procedimiento general

1. Derivar la función.
2. Igualar la derivada a cero.
3. Resolver la ecuación para encontrar los valores críticos.
4. Sustituir el valor de la variable en la función original.
5. Para conocer si es valor es máximo o un mínimo aplicamos la segunda derivada
5. Interpretar biológicamente (Opcional)

2.7 Problemas resueltos (máximos y mínimos)

1. El tamaño poblacional de una especie está dada por:

$$N(t) = -3t^2 + 18t + 5$$

donde t es el tiempo en años; para encontrar el momento en el que el tamaño poblacional es máximo, primero derivamos

$$\frac{dN}{dt} = -6t + 18$$

Igualamos la derivada a cero

$$-6t + 18 = 0$$

Resolvemos la ecuación para obtener valores críticos

$$-6t = -18$$

$$t = 3$$

El resultado anterior significa que, a los tres años, la población experimenta el tamaño máximo; para conocer el número de individuos en este momento, sustituimos $t = 3$ en la función original y resolvemos

$$N(3) = -3(9) + 18(3) + 5$$
$$= -27 + 54 + 5$$
$$= 32$$

Lo que significa que el tamaño poblacional máximo es de 32 individuos.

Para confirmar si el punto es máximo o mínimo:

Si la segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

El punto es un Máximo.

Si la segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

El punto es un Mínimo.

Por lo tanto, en nuestro problema, cuando derivamos el resultado de la primera derivada obtenemos:

$$\frac{dN}{dt} = -6t + 18$$

y

$$\frac{d^2N}{dt} = -6$$

Como:

$$\frac{d^2N}{dt} < 0$$

Se confirma que es un **máximo**.

Por lo tanto, la población máxima es de 32 individuos y se alcanza a los 3 años; posteriormente la población disminuye por el agotamiento de recursos, tendiendo a la extinción.

2. Suponga que la producción de biomasa en kg, en función del tiempo en meses es:

$$B(t) = t(20 - t)$$

Para conocer si existe un punto crítico de máxima o mínima producción en el tiempo, primero expandimos la ecuación

$$B(t) = 20t - t^2$$

Derivamos

$$\frac{dB}{dt} = 20 - 2t$$

Igualamos a cero

$$20 - 2t = 0$$

Resolvemos la ecuación

$$2t = 20$$

$$t = 10$$

De acuerdo con el resultado, a los 10 meses la producción de biomasa es máxima o mínima. Para conocer la biomasa producida en ese tiempo, sustituimos $t = 10$ en la ecuación original y resolvemos

$$B(10) = 10(20 - 10)$$

$$= 10(10)$$

$$= 100$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada para sabes si el punto es un máximo o un mínimo

Derivamos nuevamente:

$$\frac{d^2B}{dt^2} = -2$$

Como:

$$\frac{d^2B}{dt} < 0$$

Se confirma que es un **máximo**.

De ahí se concluye que la producción máxima es de 100 kg y se da a los 10; después de ese tiempo, la biomasa disminuye. El sistema presenta un punto óptimo de rendimiento.

3. Suponga que el costo energético (kJ) en función del tiempo (h) para un maratonista activo está dado por:

$$E(t) = 2t^2 - 8t + 10$$

Para determinar si hay un punto crítico de máximo o mínimo costo energético, se calcula la primera derivada de la función

$$\frac{dE}{dt} = 4t - 8$$

Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación

$$4t - 8 = 0$$

$$t = 2$$

Lo que significa que a las 2 h tiene lugar un costo energético mínimo o máximo para el maratonista. Para conocer el valor del costo energético en este punto, sustituimos $t = 2$ en la ecuación original y resolvemos

$$E(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 10$$

$$= 8 - 16 + 10$$

$$= 2$$

Para comprobar el tipo de punto crítico, se obtiene la segunda derivada

$$\frac{d^2E}{dt^2} = 4$$

Como:

$$\frac{d^2E}{dt} > 0$$

Se confirma que es un **mínimo**.

De esta manera, se concluye que, a las 2 h, el costo energético del maratonista es mínimo; antes y después de ese punto, el gasto aumenta; lo anterior significa que en la 2 h existe un punto óptimo fisiológico.

2.8 Ejercicios propuestos (derivadas)

Derivación directa

1. La población de una especie en un ecosistema aislado está modelada por:

$$N(t) = 5t^3 - 7t^2 + 2$$

donde:

- $N(t) =$ número de individuos,
- $t =$ tiempo en años.

Determinar la tasa de crecimiento poblacional $\frac{dN}{dt}$.

2. La concentración de un medicamento en el organismo está dada por:

$$C(t) = 300e^{-0.5t}$$

donde:

- $C(t) =$ Concentración (mg/L),
- $t =$tiempo en horas.

Determinar la tasa de eliminación del fármaco.

3. El tamaño poblacional de una especie con recursos limitados está modelado por:

$$N(t) = \frac{20t}{t+2}$$

donde:

- $N(t) =$ número de individuos,
- $t =$ tiempo en años.

Determinar la tasa de crecimiento poblacional usando la regla del cociente.

Regla de la cadena

4. La tasa metabólica de un organismo depende de la temperatura corporal según:

$$M(T) = e^{0.2T}$$

Donde:

- $M(T) =$ Tasa metabólica (kcal/h),
- $T =$ Temperatura (°C)

La temperatura corporal varía con el tiempo de acuerdo con:

$$T(t) = 3t^2 + 1$$

Donde:

- t = Tiempo (h)

  Determinar la tasa de cambio de la actividad metabólica respecto al tiempo:

$$\frac{dM}{dt}$$

5. La producción de una hormona (ng/día) depende de la masa corporal (kg) según la función:

$$H(m) = \ln(1 + m^2)$$

y la masa corporal varía con el tiempo (min) según la función:

$$m(t) = 2t^3$$

Determinar la tasa de cambio hormonal respecto al tiempo:

$$\frac{dH}{dt}$$

Máximos y mínimos

6. La población de una especie en un ambiente con recursos temporales está dada por:

$$N(t) = -3t^2 + 18t$$

Donde:

- $t =$ tiempo (años),

Si el modelo representa crecimiento seguido de declive por agotamiento de recursos.

a) Determinar el tiempo en que la población es máxima.

b) Determinar el tamaño máximo poblacional.

7. La tasa de producción (µg) de una sustancia metabólica está dada por:

$$P(t) = -t^2 + 10t - 5$$

Donde:

- $t =$tiempo (min).

    a) Determinar el tiempo en que la producción es máxima.

    b) Determinar el valor máximo alcanzado.

Unidad 3. Integrales

3.1 Concepto de Integral

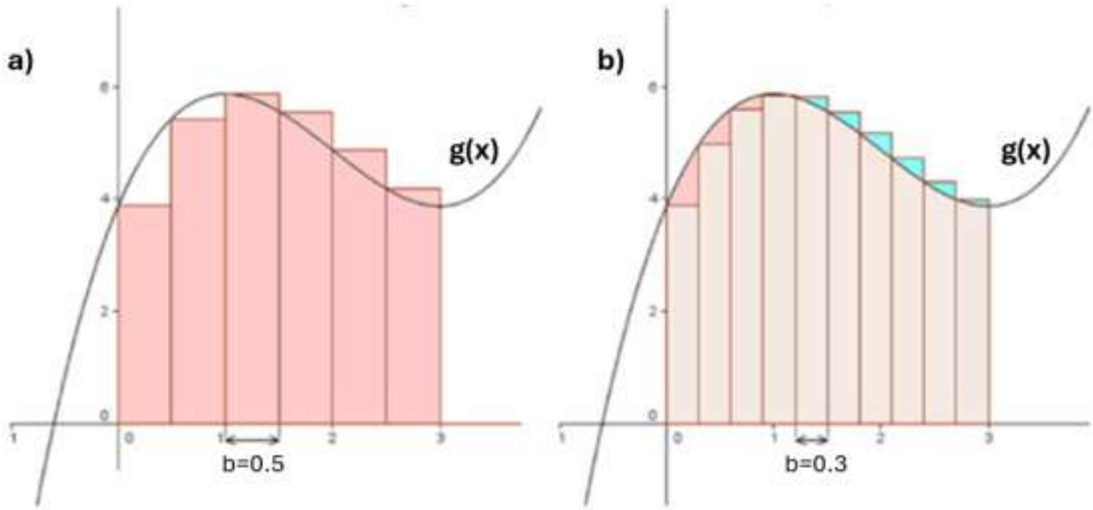


Figura 6. La integral es el área que se encuentra por debajo de las funciones. Se muestran dos aproximaciones para el cálculo del área bajo $g(x)$.

La integral se define como el área que se encuentra por debajo una función determinada; por ejemplo, para calcular el área que se encuentra debajo de la función $g(x)$ en la figura 6 se inscribieron rectángulos, que son figuras geométricas con área conocida ($b \times h$). En a) se aproximó el cálculo del área de interés inscribiendo 6 rectángulos ($n = 6$) de base $b = 0.5$ y altura $h = g(x)$, por lo tanto, el área calculada sería:

$$A = \sum_{i=1}^{6} g(x)(0.5)$$

Sin embargo, el área calculada no es igual al área total de interés, por lo tanto, el b) se opta por inscribir un número mayor de rectángulos ($n = 10$) cuya longitud de base es menor que en el caso anterior ($b = 0.3$). Así, el área calculada en este caso se expresaría:

$$A = \sum_{i=1}^{10} g(x)(0.3)$$

Aún con ello, se aprecia que al agregar más rectángulos para el cálculo del área de interés obtenemos una estimación más cercana, pero no exacta; por lo tanto, se sugiere inscribir cada vez más rectángulos debajo de la curva, tantos que: $n \to \infty$ y $b \to 0$. Considerando esto, la base de los rectángulos serían cambios diferenciales, por lo que $b = dx$. El área total se expresaría:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} g(x)dx$$

Pero la notación utilizada para expresar las sumatorias de elementos infinitos es: "$\int$ ", por lo que el área bajo la curva de la función sería:

$$A = \int g(x)dx$$

Analíticamente, la integral es la operación inversa de la derivada o antiderivada.
Si:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

entonces:

$$\int g(x)\, dx = f(x) + C$$

donde Ces la constante de integración.

3.2 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo dice que:

La integral calcula acumulación usando tasas, y la derivada recupera la tasa a partir de la acumulación; por tanto, derivar y luego integrar son procesos inversos; por lo tanto, la derivada mide qué tan rápido cambia un fenómeno, mientras que la integral mide cuánto cambió en total. El Teorema Fundamental del Cálculo conecta ambas ideas y es la razón por la que a la integral se le conozca como antiderivada (fig. 6)

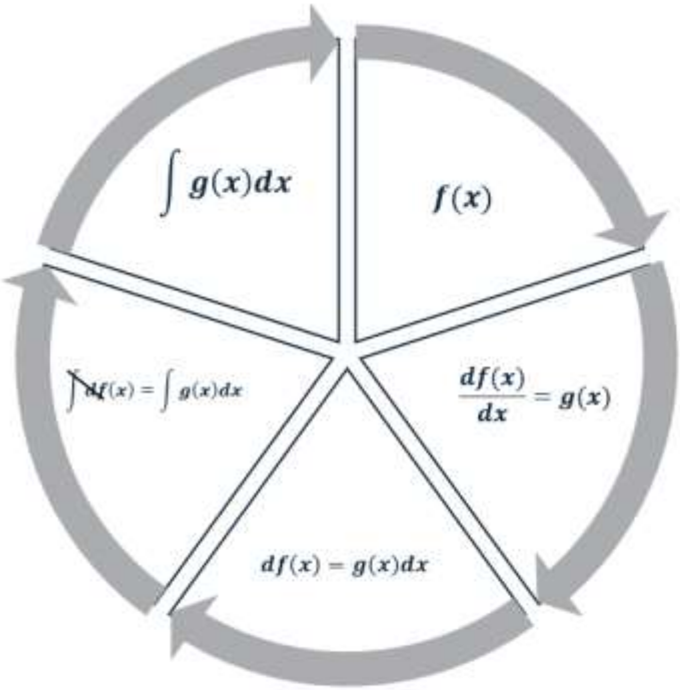


Figura 6. El Teorema Fundamental del Cálculo indica que al derivar una función primitiva $f(x)$ y posteriormente integrar la derivada, se obtiene nuevamente la función primitiva.

En biología, la integral representa la acumulación de biomasa, la cantidad total de sustancia absorbida, el crecimiento total a partir de una tasa, la energía total consumida o el número total de individuos nacidos en un intervalo.

Por ejemplo:

Si:

$$\frac{dN(t)}{dt}$$

es la tasa de crecimiento poblacional de una especie, entonces:

$$N(t) = \int \frac{dN(t)}{dt} dt$$

representa el tamaño poblacional acumulado.

Otros ejemplos biológicos son:

- Si $\frac{dL(t)}{dt}$ es la velocidad de crecimiento de un pez, $L(t)$es la longitud total.
- Si $\frac{dC(t)}{dt}$ es la tasa de absorción de un fármaco, $C(t)$es la concentración acumulada.

3.3 Reglas básicas de integración

Estas reglas permiten resolver integrales de funciones simples sin aplicar técnicas especiales.

Integral de la constante

$$\int C\, dx = Cx + C_1$$

donde:

- $C =$ constante del problema
- $C_1 =$ constante de integración

Ejemplo:

$$\int 5\, dt$$

Si identificamos que 5 es una constante

Aplicamos la regla directamente:

$$= 5t + C$$

Regla del factor constante

$$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$$

Es decir, una constante multiplicando puede salir de la integral, para realizar el cálculo únicamente en la función indicada.

Ejemplo:

$$\int 7t^3\, dt$$

Colocamos la constante “7” fuera de la integral y únicamente integramos la potencia

$$= 7\int t^3\, dt$$

Integral de la potencia

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

siempre que $n \neq -1$.

Ejemplo:

$$\int 4t^2 dt$$

Sacamos de la integral el 4 (constante)

$$= 4\int t^2 dt$$

Aplicamos la regla de la potencia

$$4\left(\frac{t^{2+1}}{2+1}\right)+C$$

$$=4\left(\frac{t^3}{3}\right)+C$$

Simplificamos

$$=\frac{4t^3}{3}+C$$

Integral de la función exponencial

$$\int ae^{bx}dx=\frac{ae^{bx}}{b}+C$$

Ejemplo:

$$\int 200e^{-0.4t}dt$$

Sacamos el 200

$$=200\int e^{-0.4t}dt$$

Aplicamos la regla exponencial, considerando que $a=200$, y $b=-0.4$ entonces:

$$=200\left(\frac{e^{-0.4t}}{-0.4}\right)+\mathrm{C}$$

Simplificamos

$$\frac{200}{-0.4}=-500$$

$$=-500e^{-0.4t}+C$$

Integral de suma y diferencia

$$\int(u+v+w)dx=\int u\,dx+\int v\,dx+\int w\,dx$$

Ejemplo:

$$\int(3t^2+4t-2)dt$$

Separamos la integral

$$=\int 3t^2dt+\int 4tdt-\int 2dt$$

Integramos cada término

$$\int 3t^2dt=3\frac{t^3}{3}=t^3$$

$$\int 4tdt = 4\frac{t^2}{2} = 2t^2$$

$$\int 2dt = 2t$$

Unimos los resultados con el signo correspondiente

$$t^3 + 2t^2 - 2t + C$$

Resultado final

$$\int (3t^2 + 4t - 2)dt = t^3 + 2t^2 - 2t + C$$

Integral de $\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln\ x + C$$

Ejemplo

$$\int \frac{1}{t}dt$$

Aplicamos la regla directamente:

$$= \ln\ t + C$$

Integral del logaritmo natural

$$\int lnx\,dx = xlnx - x + C$$

**Nota: esta fórmula NO es una regla básica, es un resultado que proviene de una integración por partes.*

Ejemplo:

$$\int lnt\,dt =$$

Aplicamos directamente la regla y agregamos la constante de integración:

$$= tlnt - t + C$$

3.4 Técnicas de integración

Cambio de variable (sustitución)

El **cambio de variable** (o sustitución) es una técnica que se utiliza cuando la integral contiene una función compuesta o un producto entre una función y su derivada o un factor del mismo grado que esta. Es el equivalente en integración de la **regla de la cadena** en derivadas.

Si en derivadas:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

En integración hacemos el proceso inverso.

Forma general

Si tenemos una integral del tipo:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Hacemos el cambio:

$$u = g(x)$$

Entonces:

$$du = g'(x)dx$$

Y la integral se convierte en:

$$\int f(u)\,du$$

Que suele ser mucho más sencilla.

Procedimiento paso a paso

1. Identificar la función más compleja o de mayor grado dentro de la integral.
2. Definir como una nueva variable (por ejemplo "u") a la función más compleja o de mayor grado.
3. Calcular du.
4. Sustituir ambos cambios en la integral.
5. Simplificar si fuera el caso.
6. Integrar respecto a u.
7. Sustituir por la variable original.

Pero...antes de empezar a integrar, debemos preguntarnos:

¿Estoy viendo una función compuesta?

Es decir:

- ¿Una función elevada a otra? ($ax^{polinomio}\ o\ (polinomio)^n$)
- ¿Una función exponencial cuyo exponente es otra función? ($e^{polinomio}$)
- ¿Una raíz de una suma? ($\sqrt{polinomio}$)
- ¿Una función que contiene un polinomio dentro? ($\ln\,(polinomio)$)

En pocas palabras:

Si veo una función dentro de otra y la derivada de la función más compleja aparece multiplicando... entonces uso cambio de variable.

Ejemplo resuelto de integral por cambio de variable:

1. La tasa de acumulación de biomasa bacteriana depende del tiempo y está dada por:

$$\frac{dB(t)}{dt} = 4te^{2t^2}$$

Encontrar una función "$B(t)$" para la biomasa bacteriana con respecto al tiempo.

Primero identificamos si es una función compuesta

Observamos:

$$4te^{2t^2}$$

Vemos que:

- Hay una exponencial.
- El exponente es $2t^2$, no solo t.
- La derivada de $2t^2$es $4t$, que aparece multiplicando.

✓ Tenemos función compuesta.

✓ La derivada interna está presente.

Usamos cambio de variable.

Planteamos la integral

$$B(t) = \int 4te^{2t^2}dt$$

Definimos el cambio de variable

$$u = 2t^2$$

Derivamos

$$\frac{du}{dt} = 4t$$

Multiplicamos por dt

$$du = 4t\,dt$$

Sustituimos en la integral

$$\int 4te^{2t^2}dt$$

Donde

$$4tdt = du$$

y

$$e^{2t^2} = e^u$$

Por lo tanto, la integral se transforma en:

$$\int e^u du$$

Integramos

$$\int e^u du = e^u + C$$

Sustituimos por la variable original

Donde hay que recordar que:

$$u = 2t^2$$

entonces

$$= e^{2t^2} + C$$

Resultado final

$$B(t) = e^{2t^2} + C$$

La biomasa acumulada crece exponencialmente con una aceleración dependiente del tiempo, porque el exponente contiene t^2.

Integración por partes

Es el procedimiento contrario a la regla del del producto en derivadas y también se utiliza para integrar el producto de dos funciones, siempre que estas no puedan simplificarse por cambio de variable. La técnica de integración por partes se resume:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Antes de empezar a integrar utilizando esta técnica, nos debemos preguntar:

¿Tengo el producto de dos funciones diferentes?

Es decir:

- Un polinomio multiplicando una exponencial.
- Un polinomio multiplicando un logaritmo.
- Una variable multiplicando una función que sí puedo integrar fácilmente.

Existen señales claras de que necesitamos aplicar integración por partes:

1. Hay un producto:

$$f(x) \cdot g(x)$$

2. No es una función compuesta.
3. Una de las funciones se vuelve más simple al derivarla.

En pocas palabras:

Si veo una multiplicación entre dos funciones distintas y una de ellas se simplifica al derivarla… entonces uso integración por partes.

Procedimiento paso a paso

1. Identificar el producto.
2. Elegir:

   "u" (la función que voy a derivar, generalmente es la más simple o los logaritmos naturales)

   "dv" (la función que voy a integrar)
3. Calcular:

   "du"

   "v"
4. Aplicar la fórmula:

$$\int udv = uv - \int v\, du$$

5. Simplificar.

Ejemplo resuelto de integral por partes

1. La tasa de consumo energético de un organismo está dada por:

$$\frac{dE(t)}{dt} = te^{-0.3t}$$

Donde:

- $t =$ tiempo
- $e^{-0.3t} =$ decaimiento metabólico

Calcular la energía acumulada ($E(t)$):

$$\int te^{-0.3t} dt$$

Identifiquemos si la función es un producto

Observamos:

$$\frac{dE(t)}{dt} = te^{-0.3t}$$

Tenemos el producto de t, por una exponencial $e^{-0.3t}$. Como la derivada de la función más compleja no es similar a uno de los factores de la multiplicación, la función no puede integrarse por cambio de variable, por lo que se procede a la integración por partes.

Comenzamos eligiendo la función que será u y la que será dv. Como la función potencial "t" es la más simple, se seleccionará como "u", mientras que la exponencial será "dv". Entonces:

$$u = t$$
$$dv = e^{-0.3t}dt$$

Calculamos du y v

Derivamos u:

$$du = dt$$

Integramos dv:

$$v = \int e^{-0.3t}dt$$

Usamos regla exponencial:

$$v = \frac{1}{-0.3}e^{-0.3t}$$
$$v = -\frac{10}{3}e^{-0.3t}$$

Aplicamos la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Sustituimos:

$$= t\left(-\frac{10}{3}e^{-0.3t}\right) - \int \left(-\frac{10}{3}e^{-0.3t}\right)dt$$

Simplificamos y extraemos a la constante de la integral

$$= -\frac{10}{3}te^{-0.3t} + \frac{10}{3}\int e^{-0.3t}dt$$

Integramos lo que falta

$$\int e^{-0.3t}dt = -\frac{e^{-0.3t}}{0.3}$$

Entonces

$$= -\frac{10}{3}te^{-0.3t} + \frac{10}{3}\left(-\frac{e^{-0.3t}}{0.3}\right)$$

Resultado final

$$= -\frac{10}{3}te^{-0.3t} - \frac{10}{0.9}e^{-0.3t} + C$$

En este caso, la energía acumulada depende de un término proporcional al tiempo y un término de decaimiento metabólico, siendo este último el que modula la acumulación energética.

Integración por Fracciones parciales

La **integración por fracciones parciales** es una técnica que se utiliza para integrar **funciones racionales**, es decir, fracciones donde:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $P(x)$y $Q(x)$son polinomios.
- $Q(x) \neq 0$.

La idea central es:

Descomponer una fracción algebraica complicada en una suma de fracciones más simples que podemos integrar utilizando las técnicas que revisamos previamente.

¿Cuándo podemos usar la integración por fracciones parciales?

Esta técnica se utiliza para integrar funciones racionales que al simplificarse no se pueden integrar por cambio de variable o por partes. Para descomponer un cociente en fracciones parciales deben cumplirse dos condiciones:

1. El grado del numerador debe ser menor que el del denominador. Si no lo es, primero se hace división de polinomios.
2. El denominador debe poder factorizarse.

De acuerdo con lo anterior, si el denominador se factoriza como:

$$(x-a)(x-b)$$

Entonces podemos escribir:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Donde A y B son constantes que debemos encontrar.

Antes de integrar, nos debemos preguntar:

¿Tenemos una fracción algebraica?... ¿El denominador se puede factorizar?

Si la respuesta es sí, entonces probablemente debes usar fracciones parciales.

Procedimiento paso a paso

1. Verificar grados.
2. Factorizar el denominador.
3. Proponer la suma o resta de fracciones con constantes desconocidas.
4. Resolver la operación de fracciones y proponer un sistema de ecuaciones igualando el numerador de las fracciones parciales con el original.
5. Resolver el sistema para encontrar los numeradores constantes de las fracciones parciales.
6. Integrar cada fracción parcial por separado, eligiendo la técnica que mejor convenga.

Ejemplo de solución de integrales por fracciones parciales

1. En un modelo simplificado de competencia intraespecífica, la tasa de cambio poblacional depende de la expresión:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{1}{t(t-3)}$$

Se desea encontrar la función implícita que relaciona Ncon el tiempo.

Plantear la integral

$$= \int \frac{1}{t(t-3)} dt$$

Verificar condiciones

- Es una fracción racional propia.
- El denominador ya está factorizado.

Por lo tanto, usamos fracciones parciales.

Proponer descomposición

$$\frac{1}{t(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3}$$

Resolver la operación de las fracciones parciales

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3) + Bt}{t(t-3)}$$

Multiplicamos el resultado por $t(t-3)$:

$$\frac{A(t-3)+Bt}{t(t-3)} \times t(t-3) = \frac{(A(t-3)+Bt)\cancel{[t(t-3)]}}{\cancel{t(t-3)}}$$

Expandimos el resultado obtenido

$$A(t-3)+Bt = At-3A+Bt$$

Agrupamos términos semejantes:

$$At-3A+Bt = (A+B)t-3A$$

Planteamos el sistema de ecuaciones considerando la agrupación anterior y el numerador de la función original:

Como en el numerador original no existe un término multiplicado por la variable, entonces la suma de términos con "t"en el numerador de las fracciones parciales se igualan con 0

$$(A+B)t = 0t$$

Mientras que el término constante del numerador de las fracciones parciales se iguala con la constante del numerador original:

$$-3A = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$A = -\frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1}{3}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\int \frac{1}{t(t-3)}dt = \int \frac{-\frac{1}{3}}{t}dt + \int \frac{\frac{1}{3}}{t-3}dt$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{t}{1}}dt + \int \frac{\frac{1}{3}}{\frac{t-3}{1}}dt$$

$$= \int -\frac{1}{3t}dt + \int \frac{1}{3(t-3)}\mathrm{dt}$$

Extraemos a las constantes e integramos

$$\int \frac{1}{t(t-3)}dt = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{3}\int \frac{1}{t-3}dt$$

En la primera integral aplicamos la regla:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln\ \mathrm{x}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{3}\int\frac{1}{t}dt=-\frac{1}{3}\mathrm{lnt}$$

Mientras que en la segunda integral aplicamos cambio de variable:

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-3}dt=$$

$$u=t-3$$

$$\frac{du}{dt}=1$$

$$dt=du$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-3}dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{3}lnu=\frac{1}{3}\ln{(t-3)}$$

Sumamos los resultados de ambas integrales y le agregamos la constante de integración

$$\frac{1}{3}\ln(t-3)-\frac{1}{3}lnt+C$$

Simplificamos factorizando y utilizando las propiedades de los logaritmos

$$=\frac{1}{3}[\ln(t-3)-t]+\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left[\frac{t-3}{t}\right]+\mathrm{C}$$

$$=\ln\left[\frac{t-3}{t}\right]^{\frac{1}{3}}+C$$

$$=\sqrt[3]{\ln\left[\frac{t-3}{t}\right]}+C$$

Por lo tanto, la función implícita del tamaño poblacional es:

$$N(t)=\sqrt[3]{\ln\left[\frac{t-3}{t}\right]}+C$$

La solución muestra que la población tiene comportamientos críticos en:

- $N=0$
- $N=3$

Estos pueden representar:

- Extinción.
- Punto de equilibrio.
- Umbral de competencia.

3.5 Problemas resueltos

1. Integrar las siguientes funciones:

a) $\frac{dy}{dx} = 5x^2 - 3e^{-2x} - ln\sqrt[3]{x}$

Para integrar el polinomio anterior se utilizan las reglas de integración para funciones simples. Antes de aplicar las reglas es posible simplificar el último monomio:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^2 - 3e^{-2x} - \frac{1}{3}lnx$$

Despejamos dy y aplicamos la propiedad distributiva para integrar cada monomio del polinomio:

$$dy = \left(5x^2 - 3e^{-2x} - \frac{1}{3}lnx\right)dx$$

$$dy = 5x^2dx - 3e^{-2x}dx - \frac{1}{3}lnxdx$$

$$\int dy = \int 5x^2dx - \int 3e^{-2x}dx - \frac{1}{3}\int lnxdx$$

Aplicamos las reglas:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int ae^{bx}dx = \frac{ae^{bx}}{b} + C$$

$$\int lnx\, dx = xlnx - x + C$$

De la siguiente manera:

$$y = \frac{5x^{2+1}}{2+1} - \left(\frac{3e^{-2x}}{-2}\right) - \frac{1}{3}(xlnx - x) + C$$

Y simplificamos:

$$y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2e^{2x}} - \frac{1}{3}(xlnx - x) + C$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{2x^2+4}$

Para integrar la función anterior es necesario hacer un cambio de variable, ya que se trata del producto de una función compuesta por una similar a su derivada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x(2x^2+4)^{-1}$$

Despejamos dy e indicamos la integral:

$$dy = 3x(2x^2+4)^{-1}dx$$

$$\int dy = \int 3x(2x^2+4)^{-1}dx$$

Realizamos el cambio de variable por la función de grado mayor y la derivamos:

$$u = 2x^2+4$$

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

Despejamos dx en la última ecuación:

$$dx = \frac{du}{4x}$$

Sustituimos en la integral por los términos de u encontrados:

$$\int dy = \int 3x\,u^{-1}\left(\frac{du}{4x}\right)$$

Y reorganizamos los elementos de la integrar para cancelar términos comunes y extraer el factor constante de la integral:

$$\int dy = \int \frac{3x}{4x}u^{-1}du$$

$$\int dy = \frac{3}{4}\int u^{-1}du$$

Integramos utilizando la regla:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln\, x + C$$

De la siguiente manera:

$$y = \frac{3}{4}lnu + C$$

Y sustituimos el valor de u en términos de x:

$$y = \frac{3}{4}ln(2x^2+4) + C$$

$$y = ln\sqrt[4]{(2x^2+4)^3} + C$$

c) $\frac{dy}{dx} = 6x^2 ln\sqrt{x}$

Despejamos dy:

$$dy = 6x^2 ln\sqrt{x}dx$$

La función anterior es un producto y como uno de los factores no es similar a la derivada del otro, es necesario integrarla por partes:

$$\int udv = uv - \int v\,du$$

Definimos u y dv:

$$u = \frac{1}{2}lnx$$

$$dv = 6x^2dx$$

Derivamos u e integramos dv:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2x}$$

$$du = \frac{dx}{2x}$$

$$v = 2x^3$$

Por lo tanto:

$$\int dy = \int ln\sqrt{x}\,6x^2dx = \left(\frac{1}{2}lnx\right)(2x^3) - \int 2x^3\frac{dx}{2x}$$

Simplificamos los términos antes de integrar:

$$= 2x^3lnx - \int x^2dx$$

Terminando la integral:

$$= 2x^3lnx - \frac{x^3}{3} + C$$

Factorizando:

$$= x^3\left(lnx^2 - \frac{1}{3}\right) + C$$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{x^2+2x-3}$

La función anterior se debe descomponer en sus fracciones parciales. Factorizamos el denominador e igualamos la función original con la suma de sus fracciones parciales, sustituyendo los numeradores por constantes desconocidas:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

$$\frac{6x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

Realizamos la suma de las fracciones parciales y multiplicamos por $x^2 + 2x - 3$:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+3)}{x^2 + 2x - 3} = \frac{Ax - A + Bx + 3B}{x^2 + 2x - 3}$$

$$= \frac{Ax - A + Bx + 3B}{x^2 + 2x - 3}(x^2 + 2x - 3) = Ax - A + Bx + 3B$$

En el numerador obtenido agrupamos términos semejantes:

$$= (A+B)x - A + 3B$$

Y planteamos el sistema de ecuaciones considerando el numerador de la función original:

$$(A+B)x = 6x$$

$$-A + 3B = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos:

$$A = {}^9\!/_2$$

$$B = {}^3\!/_2$$

Por lo tanto:

$$\frac{6x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{{}^9\!/_2}{x+3} + \frac{{}^3\!/_2}{x-1}$$

Integramos las fracciones parciales:

$$\int dy = {}^9\!/_2 \int \frac{1}{x+3}dx + {}^3\!/_2 \int \frac{1}{x-1}dx$$

Resolvemos las integrales por cambio de variable:

$$y = {}^9\!/_2 \ln(x+3) + {}^3\!/_2 \ln(x-1) + C$$

Aplicamos propiedades de los logaritmos y simplificamos:

$$y = ln\frac{(x+3)^{9/2}}{(x-1)^{3/2}} + C$$

$$y = ln\sqrt{\frac{(x+3)^9}{(x-1)^3}} + C$$

2. Resuelve el problema:

La tasa de crecimiento del área foliar de una planta está dada por:

$$\frac{dL}{dt} = 5t^2$$

donde:

- $L(t) =$ área foliar acumulada (cm^2),
- $t =$ tiempo en semanas.

Si al inicio del estudio la planta tenía 2 cm^2 de hojas:

$$L(0) = 2$$

Determinar la función $L(t)$.

Como se trata de una función potencial simple, integramos por la regla de la potencia directamente:

$$L(t) = \int 5t^2 dt$$

$$= 5\frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{5}{3}t^3 + C$$

Sustituimos la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración:

$$L(0) = 2$$

$$2 = \frac{5}{3}(0)^3 + C$$

$$C = 2$$

Resultado final

$$L(t) = \frac{5}{3}t^3 + 2$$

El área foliar crece de manera acelerada con el tiempo debido al término cúbico.

3.6 Ejercicios propuestos

Reglas básicas

1. $\int 9t^2 dt$
2. $\int (4t^3 - 2t + 1)dt$
3. $\int 150e^{0.3t} dt$

Cambio de variable

4. $\int 8te^{4t^2} dt$
5. $\int (3t + 2)(t^2 + 2t)^5 dt$

Por partes

6. $\int te^{0.5t} dt$

Fracciones parciales

7. $\int \frac{1}{x(x+4)} dx$

Unidad 4. Ecuaciones diferenciales

4.1 Concepto de ecuación diferencial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona a una función desconocida con una o más de sus derivadas. La forma general de una ecuación diferencial es:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

En biología, una ecuación diferencial describe cómo evoluciona un sistema biológico a lo largo del tiempo. Las ecuaciones diferenciales modelan:

- Crecimiento poblacional
- Eliminación de sustancias
- Enfriamiento corporal
- Crecimiento tumoral
- Dinámica depredador-presa
- Cinética enzimática

4.2 Solución general y solución particular de las ecuaciones diferenciales

Solución general

Es la familia completa de soluciones que satisfacen la ecuación e incluyen una constante arbitraria C.

Ejemplo:

$$y = Ce^{kx}$$

Aquí C representa todas las posibles condiciones iniciales para un fenómeno determinado.

Solución particular

Se obtiene cuando se conoce una condición inicial:

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$$

Esto permite calcular el valor específico de la constante $\boldsymbol{C}$.

4.3 Ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = ky$

Interpretación biológica

La tasa de crecimiento del fenómeno es proporcional al tamaño o cantidad en un momento dado. Se usa para modelar:

- Eliminación de fármacos
- Mortalidad celular
- Crecimiento bacteriano en fase exponencial

Solución general

A partir de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Separamos variables comunes despejando en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

Integrar ambos lados:

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx$$

$$\ln y = kx + C$$

Despejamos la variable "y" elevando las funciones a la exponencial de base "e" en ambos lados de la igualdad

$$e^{\ln y} = e^{kx+C}$$

Sabemos que

$$e^{\ln y} = y$$

porque exponencial y logaritmo natural son funciones inversas.

Entonces queda

$$y = e^{kx+C}$$

Usamos la propiedad:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

Entonces

$$y = e^{C} \cdot e^{kx}$$

Como C es una constante, entonces e^{C} también es una constante. Llamamos C a la constante:

$$C = e^{C}$$

Entonces la solución final queda:

$$\boldsymbol{y = Ce^{kx}}$$

Solución particular

Una población inicial de 200 bacterias crece proporcionalmente a su tamaño con $k = 0.3$. ¿Cuál es el modelo de crecimiento de esta población bacteriana?

Obtenemos la solución general de acuerdo con el procedimiento anterior:

$$N(t) = Ce^{0.3t}$$

Las condiciones iniciales son: *N = 200; cuando t = 0;* es decir:

$$N(0) = 200$$

Sustituimos estas condiciones en la solución general:

$$200 = Ce^{0.3(0)}$$

$$200 = \mathrm{C}e^{0}$$

$$C = 200$$

Sustituyendo el valor de C en la solución general, obtenemos la solución particular:

$$N(t) = 200e^{0.3t}$$

4.4 Ecuación: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}}$

Interpretación biológica

La tasa de cambio es proporcional:

- Al tamaño o cantidad actual "y"
- Al inverso de la variable independiente del fenómeno "$1/x$"

Se usa para:

- Modelos de crecimiento alométrico
- Escalamiento biológico
- Relaciones tipo potencia (peso–metabolismo, longitud–masa)

Solución general

A partir de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}$$

Separamos variables comunes despejando en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{dy}{y} = k\frac{dx}{x}$$

Integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\frac{dx}{x}$$

$$\ln\, y = k\ln\, x + C$$

Usamos propiedades de los logaritmos

Sabemos que:

$$k\ln\, x = \ln\,(x^k)$$

Entonces:

$$\ln\, y = \ln\,(x^k) + C$$

Despejamos la variable “y” elevando las funciones a la exponencial de base “e” en ambos lados de la igualdad

$$e^{\ln y} = e^{\ln\,(x^k)+C}$$

Sabemos que

$$e^{\ln y} = y$$

Entonces

$$y = e^{\ln\,(x^k)} \cdot e^C$$

$$y = x^k \cdot e^C$$

Como e^Ces constante, la llamamos C, obteniendo la solución general:

$$y = Cx^k$$

Solución particular

El peso de un organismo “y” sigue un modelo alométrico con $k = 3$.

Cuando la longitud “x” es 1, el peso “y” es 4. ¿Cuál es el modelo de crecimiento del organismo?

Obtenemos la solución general de acuerdo con el procedimiento anterior:

$$y = Cx^3$$

Las condiciones iniciales son: $y = 4$ cuando $x = 1$; es decir:

$$y(1) = 4$$

Sustituimos las condiciones iniciales en la solución general:

$$4 = C(1)^3$$

$$C = 4$$

Por lo que la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$y = 4x^3$$

4.5 Ecuación: $\frac{dy}{dx} = k(A - y)$

Interpretación biológica

La tasa de cambio es proporcional a la diferencia entre:

- El valor máximo A
- El valor actual y

Se usa para:

- Aproximación a equilibrio
- Ley de enfriamiento
- Eliminación hacia concentración basal
- Recuperación fisiológica

Solución general

A partir de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = k(A - y)$$

Separamos variables comunes despejando en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{dy}{A - y} = kdx$$

Integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{1}{A - y} dy = \int kdx$$

La primera parte de la ecuación, se integra por cambio de variable:

$$\int \frac{1}{A - y} dy = -\ln{(A - y)}$$

Entonces:

$$-\ln(A-y)=kx+C$$

Despejamos

Multiplicamos ambos lados por -1:

$$\ln(A-y)=-kx-C$$

Despejamos la variable “y” elevando las funciones a la exponencial de base “e” en ambos lados de la igualdad

$$e^{\ln(A-y)}=e^{-kx-C}$$

$$A-y=e^{-kx}e^{-C}$$

Como e^{-C}es constante:

$$A-y=Ce^{-kx}$$

Despejamos y:

$$-y=-A+Ce^{-kx}$$

Multiplicamos en ambos lados por -1:

$$y=A-Ce^{-kx}$$

Por lo que la solución general es:

$$y=A-Ce^{-kx}$$

Solución particular

La concentración máxima de una vitamina en sangre es 80 unidades.

Si $k=0.5$ y al inicio de la aplicación ya había 20 unidades, ¿Cuál es el modelo que predice la concentración de la vitamina en cualquier momento?

Obtenemos la solución general de acuerdo con el procedimiento anterior:

$$y=80-Ce^{-0.5t}$$

Sustituimos las condiciones iniciales: $y=20$ cuando $t=0$, de la siguiente manera:

$$20=80-Ce^{0}$$

$$20=80-C$$

$$C=60$$

Por lo que la solución particular es:

$$y=80-60e^{-0.5t}$$

4.6 Ecuación $\frac{dy}{dx} = ky(A - y)$

Interpretación biológica

La tasa de crecimiento depende de:

- El tamaño actual y
- La diferencia con respecto a la capacidad máxima A

Se usa para:

- Crecimiento poblacional con límite ambiental
- Dinámica tumoral con restricción de recursos
- Crecimiento bacteriano con capacidad de carga

Solución general

A partir de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = ky(A - y)$$

Separamos variables comunes despejando en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{dy}{y(A - y)} = kdx$$

E integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dy}{y(A - y)} = \int kdx$$

La primera parte de la ecuación se integra por descomposición en fracciones parciales.

Sabemos que

$$\frac{1}{y(A - y)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A - y}\right)$$

Entonces

$$\int \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A - y}\right) dy = \int kdx$$

Integramos y simplificamos

$$\frac{1}{A}(\ln(y) - \ln(A - y)) = kx + C$$

$$\frac{1}{A}\ln\left(\frac{y}{A - y}\right) = kx + C$$

Despejamos "y" y sustituimos la constante C:

$$\ln\left(\frac{y}{A-y}\right) = kAx + C$$
$$\frac{y}{A-y} = e^{kAx+C}$$
$$\frac{y}{A-y} = Ce^{kAx}$$
$$\frac{A-y}{y} = \mathrm{C}e^{-kAx}$$
$$\frac{A}{y} - 1 = Ce^{-kAx}$$
$$\frac{A}{y} = 1 + Ce^{-kAx}$$
$$\frac{y}{A} = \frac{1}{1+Ce^{-kAx}}$$
$$y = \frac{A}{1+Ce^{-kAx}}$$

Por lo que la solución general es:

$$y = \frac{A}{1+Ce^{-kAx}}$$

Solución particular

Una población tiene capacidad máxima de 200 individuos. Con $k = 0.01$ y al inicio de la investigación había 10 individuos. ¿Cuál es el modelo que describe el tamaño poblacional?

Obtenemos la solución general de acuerdo con el procedimiento anterior y sustituyendo los valores de $A = 200$ y $k = 0.01$:

$$y = \frac{200}{1+Ce^{-2t}}$$

Sustituimos las condiciones iniciales: $y = 10$ cuando $t = 0$, de la siguiente manera:

$$10 = \frac{200}{1+C}$$
$$10(1+C) = 200$$
$$1 + C = 20$$
$$C = 19$$

Por lo que la solución particular es:

$$y = \frac{200}{1 + 19e^{-2t}}$$

4.7 Ejercicios propuestos de ecuaciones diferenciales

1. Crecimiento exponencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

En un cultivo de laboratorio, una población de bacterias se encuentra en fase exponencial de crecimiento. Se sabe que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño actual de la población.

La constante de crecimiento es:

$$k = 0.2$$

Al inicio del experimento hay:

$$N(0) = 50 \text{ bacterias}$$

Determina la función $N(t)$que describe el crecimiento de la población en el tiempo.

2. Crecimiento alométrico

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}$$

En un estudio de fisiología comparada se analiza cómo varía la tasa metabólica de un organismo en función de su masa corporal.

Se propone el modelo:

$$\frac{dM}{dx} = 3\frac{M}{x}$$

donde:

- $M =$ tasa metabólica,
- $x =$ masa corporal.

Se sabe que cuando:

$$x = 1$$

la tasa metabólica es:

$$M(1) = 4$$

Determinar la función $M(x)$que describe la relación alométrica.

3. Aproximación a equilibrio

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y)$$

Un paciente recibe un medicamento por infusión continua. La concentración en sangre aumenta hasta aproximarse a un nivel máximo estable.

El modelo es:

$$\frac{dC}{dt} = 0.5(80 - C)$$

donde:

- 80= concentración máxima posible,

Inicialmente la concentración es:

$$C(0) = 20$$

Determinar la función $C(t)$que describe cómo evoluciona la concentración del fármaco en el tiempo.

4. Modelo logístico

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y)$$

Una población de peces es introducida en un lago con recursos limitados. Se sabe que el ambiente solo puede sostener un máximo de:

$$A = 200 \text{ individuos}$$

La constante de crecimiento es:

$$k = 0.01$$

Al inicio del estudio:

$$P(0) = 10$$

Determinar la función $P(t)$ que describe el crecimiento poblacional considerando la capacidad de carga del ecosistema.

5. Eliminación de sustancia

Un medicamento se elimina del cuerpo de manera proporcional a la concentración presente en sangre. De acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\frac{dC}{dt} = -0.4C$$

La concentración inicial es:

$$C(0) = 100$$

Determinar la función $C(t)$ que describe la concentración del medicamento en el tiempo.

Hoja De Respuestas

Límites

1. 200
2. 0
3. 100
4. 200
5. a) 600 b) Se estabiliza en 600
6. a) C_0 b) 0
7. ½
8. V_{max}
9. $^{17}/_{27}$
10. $e^{16} = 8886110.521$
11. $e^{5} = 148.41$

Derivadas

1. $\frac{dN}{dt} = 15t^2 - 14t$
2. $\frac{dC}{dt} = -150e^{-0.5t}$
3. $\frac{dN}{dt} = \frac{40}{(t+2)^2}$
4. $M(T) = e^{0.2T}, T(t) = 3t^2 + 1, \frac{dM}{dt} = 1.2te^{0.2(3t^2+1)}$
5. $H(m) = ln(1 + m^2), m(t) = 2t^3, \frac{dH}{dt} = \frac{24t^5}{1+4t^6}$
6. t=3, máximo=27
7. t=5, máximo=20

Integrales

1. $3t^3 + C$
2. $t^4 - t^2 + t + C$
3. $500e^{0.3t} + C$
4. $e^{4t^2} + C$
5. $\frac{(t^2+2t)^6}{4} + C$
6. $2te^{0.5t} - 4e^{0.5t} + C$

7. $\frac{1}{4}\ln \mid \frac{x}{x+4} \mid +C$

Ecuaciones diferenciales

1. $y = 50e^{0.2x}$
2. $y = 4x^3$
3. $y = 80 - 60e^{-0.5x}$
4. $y = \frac{200}{1+19e^{-2x}}$
5. $C(t) = 100e^{-0.4t}$